

# Matematika A2a - Vektorfüggvények elméleti kérdései

(műszaki menedzser szak, 2018. tavasz)

## Első típusú improprius integrál: Végtelen tartományon korlátos függvény

Legyen  $f$  integrálható minden  $\beta > a$  esetén az  $[a, \beta]$ -n. Ha a  $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_a^\beta f(x) dx$  határérték létezik és véges, akkor azt mondjuk, hogy az  $f$  függvény improprius integrálja létezik, és  $\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_a^\beta f(x) dx$ .

## Második típusú improprius integrál: Véges tartományon nem korlátos függvény

Legyen  $f$  integrálható  $[\alpha, b]$ -n minden  $\alpha \in (a, b)$  esetén, és  $f$  nem korlátos az  $[a, b]$ -n. Ha létezik és véges a  $\lim_{\alpha \rightarrow a^+} \int_\alpha^b f(x) dx$  határérték, akkor  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\alpha \rightarrow a^+} \int_\alpha^b f(x) dx$ .

## Skaláris szorzat

Az  $\mathbf{a}$  és a  $\mathbf{b}$  vektorok skaláris szorzata az  $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \varphi$  szám, ahol  $\varphi$  jelöli az általuk bezárt szöget. Ha az  $\mathbf{a}$  koordinátái  $(a_1, a_2, a_3)$ , míg a  $\mathbf{b}$  koordinátái  $(b_1, b_2, b_3)$ , akkor a skaláris szorzatuk  $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ . Jelölés:  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  vagy  $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ .

## Vektoriális szorzat

Az  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  háromdimenziós vektorok vektoriális szorzata az a  $\mathbf{c}$  vektor, melyre a következők teljesülnek:

1.  $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \varphi$ , ahol  $\varphi$  jelöli az  $\mathbf{a}$  és a  $\mathbf{b}$  által bezárt szöget;
2.  $\mathbf{c}$  merőleges az  $\mathbf{a}$ -ra és a  $\mathbf{b}$ -re;
3. az  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  vektorok jobbrendszeret alkotnak.

Jelölése:  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ .

Ha az  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$  és  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ , akkor  $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$ .

## Vegyes szorzat

Az  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  háromdimenziós vektorok vegyes szorzata az  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$  (vektoriális, majd skaláris) szorzat.

Jelölés:  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ .

Geometriai jelentése: az  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  vektorok által kifeszített paralelepipedon előjeles térfogata.

## Sík Hesse-féle normálegyenlete

Az  $\mathbf{n} = (a, b, c)$  normálvektorú sík Hesse-féle normálegyenlete:

$$\frac{ax + by + cz - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0.$$

## Pont és sík távolsága

A  $P(x_0, y_0, z_0)$  pont távolsága az  $ax + by + cz = d$  egyenletű síktól:

$$\left| \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|.$$

## Egyenes paraméteres megadása

Az  $\mathbf{v} = (a, b, c)$  irányvektorú  $P(x_0, y_0, z_0)$  ponton átmenő egyenes paraméteres egyenlete

$$\{P + \lambda \mathbf{v} = (x_0 + \lambda a, y_0 + \lambda b, z_0 + \lambda c) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

## Egyenes egyenletrendszer a térben

Az  $(a, b, c)$  irányvektorú  $P(x_0, y_0, z_0)$  ponton átmenő egyenes egyenletrendszer

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

### Lineáris összefüggőség

A  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$   $n$  dimenziós vektorok lineárisan összefüggenek, ha vannak olyan  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  számok úgy, hogy  $\lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_k \cdot \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$  és a  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  számok nem mindegyike 0.

### Lineáris függetlenség

A  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$   $n$  dimenziós vektorok lineárisan függetlenek, ha a  $\lambda_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_k \cdot \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$  egyenlőségből következik, hogy  $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$ .

### Altér

Az  $\mathbb{R}^n$  tér egy  $V$  részhalmaza altér, ha teljesül a következő két feltétel:  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$  esetén  $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in V$  és  $\mathbf{v} \in V, \lambda \in \mathbb{R}$  esetén  $\lambda \mathbf{v} \in V$ .

### Mátrix rangja

Egy mátrix rangja a benne található lineárisan független oszlopvektorok maximális száma. Ez ugyanannyi, mint a benne található lineárisan független sorvektorok maximális száma. A legnagyobb méretű nemnulla aldetermináns mérete szintén a mátrix rangjával egyezik meg.

### Lineáris egyenletrendszerek megoldásának mátrixrangos vizsgálata

Az  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg (ahol  $A$   $m \times n$ -es mátrix,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ ), ha az egyenletrendszer mátrixának és a kibővített mátrixnak a rangja megegyezik ( $r(A) = r(A|\mathbf{b})$ ).

A lineáris egyenletrendszer pontosan akkor oldható meg egyértelműen, ha az egyenletrendszer mátrixának és a kibővített mátrixnak a rangja egymással és az ismeretlenek számával is megegyezik ( $r(A) = r(A|\mathbf{b}) = n$ ).

Ha  $r(A) = r(A|\mathbf{b}) < n$ , akkor  $n - r(A)$  változó tetszőlegesen megválasztható (szabad paraméter).

### Kifejtési tétel

Az  $n \times n$ -es  $A$  mátrix determinánsát kiszámíthatjuk a következő formulák segítségével (sor, illetve oszlop szerinti kifejtés):

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} A_{i,j},$$
$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} A_{i,j},$$

ahol  $A_{i,j}$  jelöli az  $A$  mátrix  $i$ -edik sorának és  $j$ -edik oszlopának elhagyásával kapott  $(n-1) \times (n-1)$ -es mátrix determinánsát.

### Inverz mátrix

A négyzetes  $A$  mátrix inverze az a  $A^{-1}$ -gyel jelölt mátrix, melyre  $AA^{-1} = E_n$  és  $A^{-1}A = E_n$ .

### Inverz mátrix létezésének feltétele

A négyzetes  $A$  mátrixnak pontosan akkor létezik inverze, ha a determinánsa nem 0.

### Inverz mátrix kiszámítása

Ha az  $n \times n$ -es  $A$  mátrix invertálható, akkor az inverzének  $i$ -edik sorának  $j$ -edik eleme:

$$(A^{-1})_{i,j} = (-1)^{i+j} A_{j,i} / \det(A),$$

ahol  $A_{j,i}$  jelöli az  $A$  mátrix  $j$ -edik sorának és  $i$ -edik oszlopának elhagyásával kapott  $(n-1) \times (n-1)$ -es mátrix determinánsát.

Az inverz kiszámolására másik módszer a Gauss-elimináció.

### Mátrix sajátértéke, sajátvektora

Egy  $n \times n$ -es  $A$  mátrix sajátértéke  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ha van olyan  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  nemnulla vektor, hogy  $A\mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v}$ . Ekkor a  $\mathbf{v}$ -t a  $\lambda$ -hoz tartozó sajátvektornak nevezzük.

### Diagonális mátrix

Egy négyzetes mátrixot diagonálisnak nevezünk, ha a főátlón kívül az összes eleme 0.

## Diagonalizálható mátrix

Egy  $A$  mátrixot diagonalizálhatónak nevezünk, ha létezik olyan invertálható  $C$  mátrix, hogy a  $C^{-1}AC$  mátrix diagonális.

## Diagonalizálhatóság feltétele

Egy  $n \times n$ -es mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha van  $n$  darab lineárisan független sajátvektora.

## Áttérés algebrai alakról trigonometrikus alakra

A  $z = a + bi$  komplex szám trigonometrikus alakja  $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , ahol  $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ , és

$$\varphi = \begin{cases} \arctg\left(\frac{b}{a}\right), & \text{ha } a > 0, \\ \pi + \arctg\left(\frac{b}{a}\right), & \text{ha } a < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{ha } a = 0 \text{ és } b > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{ha } a = 0 \text{ és } b < 0. \end{cases}$$

## Komplex számok $n$ -edik hatványa

A  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  komplex szám  $n$ -edik hatványa:  $z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$ .

## Komplex számok $n$ -edik gyökének meghatározása

A  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  komplex szám  $n$ -edik gyökei a

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left( \cos \left( \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \right)$$

komplex számok  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ -re.

## Algebra alaptétele

Egy polinomnak a komplex számok körében mindig van gyöke.

## Valós számsorozat

Minden  $n \in \mathbb{N}$  természetes számhoz hozzárendelünk egy  $a_n$  valós számot.

## Valós számsorozat véges határértéke

Az  $(a_n)$  sorozat határértéke az  $A \in \mathbb{R}$  szám, ha minden  $\varepsilon > 0$ -hoz létezik  $N \in \mathbb{N}$  küszöbindex, hogy  $n > N$  esetén  $|a_n - A| < \varepsilon$ . Jelölés:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ .

## Valós számsorozat végtelen határértéke

Ha az  $(a_n)$  sorozathoz minden  $K \in \mathbb{R}$  számhoz létezik  $N \in \mathbb{N}$  küszöbindex, hogy  $n > N$  esetén  $K < a_n$ , akkor az  $(a_n)$  sorozat a végtelenbe tart, ezt így jelöljük:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ .

## Valós számsorozat mínusz végtelen határértéke

Ha az  $(a_n)$  sorozathoz minden  $K \in \mathbb{R}$  számhoz létezik  $N \in \mathbb{N}$  küszöbindex, hogy  $n > N$  esetén  $a_n < K$ , akkor az  $(a_n)$  sorozat a mínusz végtelenbe tart, ezt így jelöljük:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ .

## Numerikus sor

Tetszőleges  $(a_n)$  sorozatból képezett  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$  formális összeget (numerikus) sornak nevezünk, melyet általában  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  alakban írunk.

## Numerikus sor konvergenciája

Egy  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  sort konvergensenek mondunk, ha az  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$  részletösszegek sorozat konvergens.

## Leibniz-sor

Olyan  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  sor, melyben az  $a_n$  tagok váltakozó előjelűek, abszolút értékben monoton csökkennek és 0-hoz tartanak.

## Leibniz-sorok konvergenciája

Minden Leibniz-sor konvergens.

## Hibabecslés Leibniz-soroknál

A  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  Leibniz-sorra és tetszőleges  $N \in \mathbb{N}$ -re

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^N a_n \right| \leq |a_{N+1}|.$$

## Harmonikus és hiperharmonikus sorok konvergenciája

A  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$  sor pontosan akkor konvergens, ha  $1 < a$ .

## Majoráns kritérium

Ha az  $(a_n)$  és  $(b_n)$  számsorozatokhoz található olyan  $N \in \mathbb{N}$ , hogy  $n > N$  esetén  $0 \leq a_n \leq b_n$  és a  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  sor konvergens, akkor a  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  sor is konvergens.

## Minoráns kritérium

Ha az  $(a_n)$  és  $(b_n)$  számsorozatokhoz található olyan  $N \in \mathbb{N}$ , hogy  $n > N$  esetén  $0 \leq a_n \leq b_n$  és a  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  sor divergens, akkor a  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  sor is divergens.

## Gyökkritérium

A pozitív tagú  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  sor konvergens, ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ , és divergens, ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$ .

## Hányados kritérium

A pozitív tagú  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  sor konvergens, ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ , és divergens, ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ .

## Hatványsor

A  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$  alakú sort  $x_0$  középpontú hatványsornak mondjuk.

## Konvergenciatartomány

Egy  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$  hatványsor konvergenciatartományának azt a halmazt nevezzük, melynek  $x$  elemeire a  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$  sor konvergens.

## Cauchy–Hadamard-tétel

A  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - a)^n$  hatványsor konvergenciasugara:  $r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ . Ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ , akkor  $r = \infty$ ,

míg ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ , akkor  $r = 0$ .

A hatványsor az  $(a - r, a + r)$  intervallumban konvergens, az  $[a - r, a + r]$  intervallumon kívül divergens.

## A hatványsorok tagonkénti deriválására vonatkozó tétel

Az  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  hatványsor konvergencia intervallumának belsejében a tagonkénti deriválással kapott  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$  hatványsor is konvergens, és egyenlő  $f'(x)$ -szel.

## A hatványsorok tagonkénti integrálására vonatkozó tétel

Az  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  hatványsor konvergencia intervallumának belső részintervallumaiban tagonként integrálható, azaz  $\int_a^b f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} [x^{n+1}]_a^b$ , ha  $a$  és  $b$  a konvergenciaintervallum belsejébe esik.

## Taylor-sor

Az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény  $x_0 \in \mathbb{R}$  körüli Taylor-sora a következő hatványsor:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} (x - x_0)^2 + \dots$$

## Taylor-polinom

Az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény  $x_0 \in \mathbb{R}$  körüli  $N$ -edfokú Taylor-polinomja a következő polinom:

$$\sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(N)}(x_0)}{N!} (x - x_0)^N.$$

## Parciális derivált

Az  $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D_f \subseteq \mathbb{R}^m$  függvény az  $a = (a_1, \dots, a_m) \in D_f$  pontban  $x_i$  szerint parciálisan deriválható, ha az egyváltozós  $x_i \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_m)$  függvény az  $a_i$  helyen differenciálható. A

$$\lim_{x_i \rightarrow a_i} \frac{f_i(x_i) - f_i(a_i)}{x_i - a_i}$$

differenciálhányadost az  $f$  függvény  $x_i$  szerinti parciális deriváltjának nevezzük.

Jelölése:  $f'_{x_i}(a)$  vagy  $\frac{\partial f(a)}{\partial x_i}$ .

### Íránymenti derivált

Az  $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$  függvény  $P_0 \in D_f$  pontbeli  $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$  iránymenti deriváltján ( $|\mathbf{e}| = 1$ ) a

$$\lim_{P \rightarrow P_0} \frac{f(P) - f(P_0)}{\left| \overrightarrow{P_0 P} \right|},$$

határértéket értjük, ahol  $P$  úgy tart a  $P_0$ -hoz, hogy a  $\overrightarrow{P_0 P}$  vektor az  $\mathbf{e}$ -vel párhuzamos és egyenlő állású. A határértéket így is felírhatjuk:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(P_0 + t\mathbf{e}) - f(P_0)}{t}$$

Jelölés:  $f'_e(P_0)$  vagy  $\frac{\partial f(P_0)}{\partial \mathbf{e}}$ .

### Gradiens

Ha az  $n$  változós  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  függvénynek valamely  $P_0 \in \mathbb{R}^n$  pontban mindegyik parciális deriváltja létezik, akkor az  $f$  függvény  $P_0$ -beli gradiensén a  $P_0$ -beli parciális deriváltakból álló  $n$  dimenziós vektort értjük:  $\text{grad} f(P_0) = (f'_{x_1}(P_0), f'_{x_2}(P_0), \dots, f'_{x_n}(P_0))$ .

### Jacobi-mátrix

Ha  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  függvény minden komponensének mindegyik parciális deriváltja létezik valamely  $P \in \mathbb{R}^n$  pontban, akkor az  $f$  függvény  $P$ -beli Jacobi-mátrixán a komponens függvények parciális deriváltjaiból álló mátrixok értjük: az  $i$ -edik sorának a  $j$ -edik eleme az  $i$ -edik komponens függvény  $j$ -edik változója szerinti parciális deriváltja.

### Többváltozós valós függvény differenciálhatósága

Az  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  többváltozós valós függvényről akkor mondjuk, hogy az  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  pontban differenciálható, ha minden változója szerint parciálisan deriválható  $\mathbf{x}_0$ -ban és teljesül az

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

egyenlőség, ahol  $A$  az  $f$  Jacobi-mátrixa  $\mathbf{x}_0$ -ban és  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$  esetén  $\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \rightarrow 0$ .

### Többváltozós függvény lokális minimuma

Az  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  többváltozós függvénynek az  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  pontban lokális minimuma van, ha az  $\mathbf{x}_0$  pontnak van olyan  $D$  környezete, hogy  $f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x})$  minden  $\mathbf{x} \in D$  esetén.

### Többváltozós függvény lokális maximuma

Az  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  többváltozós függvénynek az  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  pontban lokális maximuma van, ha az  $\mathbf{x}_0$  pontnak van olyan  $D$  környezete, hogy  $f(\mathbf{x}_0) \geq f(\mathbf{x})$  minden  $\mathbf{x} \in D$  esetén.

### Kétváltozós függvény lokális szélsőértékeire vonatkozó szükséges feltétel

Ha a kétváltozós valós függvénynek valamely pontban szélsőértéke van, akkor abban a pontban létező parciális deriváltjai 0-k.

### Kétváltozós függvény lokális szélsőértékeire vonatkozó elégséges feltétel

Ha az  $(x_0, y_0)$  pont valamely környezetében az  $f(x, y)$  függvény második parciális deriváltjai léteznek és folytonosak, továbbá

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0 \quad \text{és} \quad f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0,$$

akkor az  $f(x, y)$  függvénynek szélsőértéke van az  $(x_0, y_0)$  pontban. Ez a szélsőérték minimum, ha  $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ , és maximum, ha  $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ .

### Kétváltozós függvény nyeregpontra vonatkozó elégséges feltétel

Ha az  $(x_0, y_0)$  pont valamely környezetében az  $f(x, y)$  függvény második parciális deriváltjai léteznek és folytonosak, továbbá

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0 \quad \text{és} \quad f''_{xx}(x_0, y_0)f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2 < 0,$$

akkor az  $f(x, y)$  függvénynek nincs szélsőértéke az  $(x_0, y_0)$  pontban (nyeregpontra).

### Kettős integrál transzformációjára vonatkozó tétel

Legyen  $f(x, y)$  a síkbeli  $V$  tartományon integrálható függvény. Ha  $x = x(u, v)$  és  $y = y(u, v)$  az  $u$  és a  $v$  szerint parciálisan deriválható olyan függvények, amelyek a  $V$  tartomány pontjai és az  $(u, v)$  számpárok bizonyos  $W$  halmaza között (az  $x, y$  legfeljebb véges számú értékének kivételével) kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesítenek, akkor

$$\iint_V f(x, y) dx dy = \iint_W f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv,$$

ahol a Jacobi-determináns

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

### Hármas integrál transzformációjára vonatkozó tétel

Legyen  $f(x, y, z)$  a térbeli  $V$  tartományon integrálható függvény. Az  $x = x(u, v, w)$ ,  $y = y(u, v, w)$  és  $z = z(u, v, w)$  az  $u, v$  és a  $w$  szerint parciálisan deriválható olyan függvények, amelyek a  $V$  tartomány pontjai és az  $(u, v, w)$  számhármassok bizonyos  $W$  halmaza között (az  $x, y, z$  legfeljebb véges számú értékének kivételével) kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesítenek. Ekkor az  $f$  függvény hármass integrálja kifejezhető a következőképpen

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_W f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw,$$

ahol a Jacobi-determináns

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

### Tömegközéppont kiszámítása

A térbeli  $V$  tartomány tömegközéppontja  $(\frac{m_x}{m}, \frac{m_y}{m}, \frac{m_z}{m})$ , ahol

$$\begin{aligned} m &= \iiint_V \varrho(x, y, z) dx dy dz \\ m_x &= \iiint_V x \varrho(x, y, z) dx dy dz \\ m_y &= \iiint_V y \varrho(x, y, z) dx dy dz \\ m_z &= \iiint_V z \varrho(x, y, z) dx dy dz, \end{aligned}$$

ahol  $\varrho(x, y, z)$  jelöli a sűrűségfüggvényt.