

## 9. gyakorlat megoldásai

### Parciális deriváltak, érintősík

**F1.** Határozza meg az alábbi kétváltozós függvények értelmezési tartományát.

$$(a) f(x, y) = \frac{1}{9 - x^2 - y^2},$$

$$(b) f(x, y) = \ln(x + y),$$

$$(c) f(x, y) = \sqrt{x + y},$$

$$(d) f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}.$$

**M1.** (a) 0-val nem oszthatunk, tehát  $9 - x^2 - y^2 \neq 0$ , azaz  $x^2 + y^2 \neq 9$ . Ez az origó középpontú, 3 sugarú körvonal komplementere.

(b) A logaritmus függvény csak pozitív számokra van értelmezve, így  $x + y > 0$ . Ez egy nyílt félsík.

(c) Négyzetgyököt (a valós számok körében) csak nemnegatív számokból tudunk vonni, így  $x + y \geq 0$ . Ez egy zárt félsík.

(d) Itt  $4 - x^2 - y^2 \geq 0$ , azaz  $x^2 + y^2 \leq 4$  kell, ami az origó középpontú, 2 sugarú kör zárt belseje.

**F2.** Határozza meg az alábbi függvények elsőrendű parciális deriváltjait.

$$(a) f(x, y) = x^3 - 5x^2y - xy + 3y^6 - 1,$$

$$(b) f(x, y) = e^{x^2+y^3},$$

$$(c) f(x, y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right),$$

$$(d) f(x, y, z) = xe^{-y}\operatorname{tg}(z).$$

**M2.** (a)  $f'_x(x, y) = 3x^2 - 5 \cdot 2xy - y = 3x^2 - 10xy - y$   
 $f'_y(x, y) = -5x^2 - x + 3 \cdot 6y^5 = -5x^2 - x + 18y^5$

(b)  $f'_x(x, y) = e^{x^2+y^3} \cdot 2x$   
 $f'_y(x, y) = e^{x^2+y^3} \cdot 3y^2$

(c)  $f'_x(x, y) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \frac{1}{y} = \frac{y}{y^2 + x^2}$

$$f'_y(x, y) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{y^2 + x^2}$$

(d)  $f'_x(x, y, z) = e^{-y}\operatorname{tg}(z)$   
 $f'_y(x, y, z) = -xe^{-y}\operatorname{tg}(z)$   
 $f'_z(x, y, z) = xe^{-y} \frac{1}{\cos^2(z)}$

**F3.** Írja fel az adott pontban az alábbi felületek érintősíkját.

(a)  $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$ ;  $P(1, -2)$ ,

(b)  $f(x, y) = x \ln(x + y)$ ;  $P(-2, 3)$ .

**M3.** (a)  $f'_x(x, y) = 2x + 3y$ , ami a  $P$  pontban  $f'_x(1, -2) = 2 - 6 = -4$   
 $f'_y(x, y) = 3x + 2y$ , ami a  $P$  pontban  $f'_y(1, -2) = 3 - 4 = -1$   
 $f(1, -2) = 1 - 6 + 4 = -1$

Így a  $P$ -beli érintősík egyenlete:

$$z = (-4)(x - 1) + (-1)(y + 2) - 1$$

$$4x + y + z = 1$$

(b)  $f'_x(x, y) = \ln(x+y) + x \frac{1}{x+y}$ , ami a  $P$  pontban  $f'_x(-2, 3) = 0 + (-2) \cdot 1 = -2$

$$f'_y(x, y) = x \frac{1}{x+y}, \text{ ami a } P \text{ pontban } f'_y(-2, 3) = (-2) \cdot 1 = -2$$

$$f(-2, 3) = -2 \cdot 0 = 0$$

Így a  $P$ -beli érintősík egyenlete:

$$z = (-2)(x + 2) + (-2)(y - 3) + 0$$

$$2x + 2y + z = 2$$

**F4.** Az  $f(x, y) = \ln(xy)$  felületnek mely pontjában lesz az érintősík párhuzamos az  $x + y + z = 1$  egyenletű síkkal?

**M4.** Írjuk fel egy  $P(x_0, y_0)$  ponthoz tartozó érintősík egyenletét!

$$f'_x(x, y) = \frac{1}{xy} y = \frac{1}{x}, \text{ ami a } P \text{ pontban } f'_x(x_0, y_0) = \frac{1}{x_0}$$

$$f'_y(x, y) = \frac{1}{xy} x = \frac{1}{y}, \text{ ami a } P \text{ pontban } f'_y(x_0, y_0) = \frac{1}{y_0}$$

$$f(x_0, y_0) = \ln(x_0 y_0)$$

A  $P$ -beli érintősík egyenlete:

$$z = \frac{1}{x_0}(x - x_0) + \frac{1}{y_0}(y - y_0) + \ln(x_0 y_0)$$

$$-\frac{1}{x_0}x - \frac{1}{y_0}y + z = -2 + \ln(x_0 y_0)$$

Ez a sík pontosan akkor párhuzamos az  $x + y + z = 1$  egyenletű síkkal, ha a két sík normálvektorai egymás számszorosai. Az érintősík normálvektora  $\left(-\frac{1}{x_0}, -\frac{1}{y_0}, 1\right)$ , míg a másik síké  $(1, 1, 1)$ . Ha egymás számszorosai, akkor a harmadik koordináta alapján egyenlőek, és így  $-\frac{1}{x_0} = 1$  és  $-\frac{1}{y_0} = 1$ , azaz  $x_0 = -1$  és  $y_0 = -1$ .