

## 8. gyakorlat megoldásai

### Hatványsorok, Taylor-sorok

**F1.** Állapítsa meg az alábbi hatványsorok konvergenciatartományát.

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2^n}, \quad (c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n!}.$$

**M1.** Egy  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$  hatványsor konvergenciasugarát az

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|}$$

képletel számolhatjuk. Ekkor a hatványsor az  $(x_0 - r, x_0 + r)$  intervallumban konvergens, a határpontokat külön meg kell nézni, hogy ott konvergens-e.

(a)  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$  és  $x_0 = 0$ . A konvergenciasugarához

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{\sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{2n}} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt[n]{n}}} \rightarrow 1,$$

így a konvergenciasugár 1. Még meg kell nézni az intervallumon határain, azaz  $\pm 1$ -ben:

$x = 1$  esetén a hatványsor  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ , ami divergens.

$x = -1$  esetén a hatványsor  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ , ami Leibniz-sor, így konvergens.

Tehát a konvergenciatartomány a  $[-1, 1)$  intervallum.

(b)  $a_n = \frac{1}{2^n}$  és  $x_0 = 2$ . A konvergenciasugarához:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2}.$$

A konvergenciasugár ennek a reciproka, azaz 2. Így a hatványsor a  $(0, 4)$  intervallumban biztosan konvergens. A két határpont:

$x = 4$  esetén a hatványsor  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4-2)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1$ , ami divergens.

$x = 0$  esetén a hatványsor  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(0-2)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ , ami szintén divergens.

Tehát a konvergenciatartomány a  $(0, 4)$  intervallum.

(c)  $a_n = \frac{1}{n!}$  és  $x_0 = 5$ . Ebben az esetben a konvergenciasugarat a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

határértékből számoljuk (a faktoriális miatt a gyökös nem szerencsés). A konvergenciasugár ennek a reciproka, ami 0 esetén azt jelenti, hogy a sugár végtelen, így a hatványsor az egész számegeyenesen konvergens.

**F2.** Írja fel a megadott függvények  $x_0 = 0$  pont körüli Taylor-sorát. Határozza meg a sorok konvergenciasugarát is.

(a)  $\cos(5x)$ ,

(b)  $e^{-x^2}$ ,

(c)  $\frac{x}{4+x^2}$ ,

(d)  $\frac{x+1}{x+3}$ .

**M2.** (a) Mivel  $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ , így

$$\cos(5x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(5x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{5^{2n}}{(2n)!} x^{2n}.$$

Mivel a  $\cos$  hatványsora minden  $x \in \mathbb{R}$ -re konvergens, így a  $\cos(5x)$  függvényé is, azaz a konvergenciasugár végtelen.

(b) Mivel  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ , így

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}.$$

Mivel az  $e^x$  hatványsora minden  $x \in \mathbb{R}$ -re konvergens, így az  $e^{-x^2}$  függvényé is, azaz a konvergenciasugár végtelen.

(c) Itt azt használjuk fel, hogy  $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ , ha  $|x| < 1$ .

$$\frac{x}{4+x^2} = \frac{x}{4} \frac{1}{1+\frac{x^2}{4}} = \frac{x}{4} \frac{1}{1-(-\frac{x^2}{4})} = \frac{x}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x^2}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} x^{2n+1},$$

ha  $\left| -\frac{x^2}{4} \right| < 1$ , azaz  $|x| < 2$ , ami azt jelenti, hogy a konvergenciasugár 2.

(d) Itt egy kicsit alakítani kell először:

$$\frac{x+1}{x+3} = \frac{x+3-2}{x+3} = 1 - \frac{2}{x+3}$$

A  $\frac{2}{x+3}$  már hasonló a (c) feladathoz:

$$\frac{2}{x+3} = \frac{2}{3+x} = \frac{2}{3} \frac{1}{1 - (-\frac{x}{3})} = \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2}{3^{n+1}} x^n.$$

Ebből:

$$\frac{x+1}{x+3} = 1 - \frac{2}{x+3} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2}{3^{n+1}} x^n = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{(-1)^n \cdot 2}{3^{n+1}} x^n,$$

ahol az utolsó lépésben a konstanstagokat (1-et és az  $n = 0$  tagot) összevontuk.

**F3.** Számolja ki  $\sin 1$  és  $\frac{1}{e}$  értékét 3 tizedesjegy pontossággal.

**M3.** Mivel  $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ , így

$$\sin 1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \dots = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5040} + \dots$$

Ez egy Leibniz-sor, így a sor egy részletösszegének az összegtől való eltérését a következő tag abszolút értékével becsülhetjük. Mivel három tizedesjegy pontossággal szeretnénk becsülni, így egy ezrednél kisebb hibát szeretnénk, azaz ha a  $\frac{1}{5040}$  taggal becsülhetünk, akkor

$$\left| \sin 1 - \frac{101}{120} \right| < \frac{1}{5040}.$$

Tehát  $\sin 1 \approx \frac{101}{120} = 0,84166\dots$ . Valójában  $\sin 1 = 0,841470985\dots$ , tehát az első három tizedesjegy tényleg azonos.

Az  $\frac{1}{e}$  hasonlóan az  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  hatványsorból:

$$e^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} - \frac{1}{5040} + \dots$$

Ez is egy Leibniz-sor, így hasonlóan becsülhetünk, mint az előző feladatrésznél.

A  $1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} = \frac{265}{720}$  részletösszegeből

$$\left| \frac{1}{e} - \frac{265}{720} \right| < \frac{1}{5040}.$$

Tehát  $\frac{1}{e} \approx \frac{265}{720} = \frac{53}{144} = 0,3680555\dots$ , míg  $\frac{1}{e} = 0,367879441\dots$ . Kerekítve itt is megegyezik az első három tizedesjegy.