

7. gyakorlat megoldásai

Sorozatok, numerikus sorok

F1. Állapítsuk meg a sorozatok határértékét.

$$(a) \frac{5n^2 - 3n - 1}{n + 3}, \quad (b) \sqrt[n]{n + 3}, \quad (c) \sqrt{n + 1} - \sqrt{n},$$

$$(d) \frac{\sqrt{n^2 + 1} - n}{\sqrt{n + 1} - \sqrt{n}}, \quad (e) \left(\frac{3n - 1}{3n + 2} \right)^{2n}.$$

M1. (a) A törtet n -nel egyszerűsítve:

$$\frac{5n^2 - 3n - 1}{n + 3} = \frac{5n - 3 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{n}} \rightarrow \frac{\infty - 3 + 0}{1 + 0} = \infty$$

(b) A rendőr-elvet fogjuk használni, amihez alulról és felülről becslünk:

$$\begin{array}{ccc} \sqrt[n]{n} & \leq & \sqrt[n]{n + 3} & \leq & \sqrt[n]{2n} \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ 1 & & & & 1, \end{array}$$

mert $\sqrt[n]{2n} = \sqrt[n]{2} \sqrt[n]{n} \rightarrow 1 \cdot 1 = 1$. Így a rendőrelv szerint $\sqrt[n]{n + 3} \rightarrow 1$.

(c) Gyöktelenítünk:

$$\sqrt{n + 1} - \sqrt{n} = (\sqrt{n + 1} - \sqrt{n}) \frac{\sqrt{n + 1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n + 1} + \sqrt{n}} = \frac{n + 1 - n}{\sqrt{n + 1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n + 1} + \sqrt{n}} \rightarrow \frac{1}{\infty} = 0.$$

(d) A számlálót és a nevezőt is gyöktelenítjük:

$$\frac{\sqrt{n^2 + 1} - n}{\sqrt{n + 1} - \sqrt{n}} = \frac{\frac{n^2 + 1 - n^2}{\sqrt{n^2 + 1} + n}}{\frac{n + 1 - n}{\sqrt{n + 1} + \sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{n + 1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1}}{\sqrt{n + \frac{1}{n}} + \sqrt{n}} \rightarrow \frac{2}{\infty} = 0.$$

(e) A törtet $3n$ -nel egyszerűsítve, majd felhasználva, hogy $\left(1 + \frac{q}{n}\right)^n \rightarrow e^q$:

$$\left(\frac{3n - 1}{3n + 2} \right)^{2n} = \left(\frac{1 - \frac{1}{3n}}{1 + \frac{2}{3n}} \right)^{2n} = \left(\frac{\left(1 + \frac{-\frac{1}{3}}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{\frac{2}{3}}{n}\right)^n} \right)^2 \rightarrow \left(\frac{e^{-\frac{1}{3}}}{e^{\frac{2}{3}}} \right)^2 = e^{-2}.$$

F2. Írja fel az alábbi sorok részletösszeg-sorozatát, konvergensek-e ezek a sorozatok? Ha igen, akkor mi lesz a sor összege?

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n, \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n-1} + 3^n}{6^{n+1}}.$$

M2. (a) A részletösszeg-sorozat:

$$S_N = \sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{3}\right)^n = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^N = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{N+1}}{1 - \frac{1}{3}} \rightarrow \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2},$$

mert $q^n \rightarrow 0$, ha $|q| < 1$. Így a sor konvergens, és az összege $\frac{3}{2}$.

(b) Az (a) részhez hasonlóan belátható, hogy $|q| < 1$ esetén

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1 - q}$$

tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ számra, így

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n-1} + 3^n}{6^{n+1}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n-1}}{6^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{6^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2^2)^n \cdot 2^{-1}}{6^n \cdot 6} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{6^n \cdot 6} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{12} \left(\frac{4}{6}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{6} \left(\frac{3}{6}\right)^n = \frac{\frac{1}{12}}{1 - \frac{2}{3}} + \frac{\frac{1}{6}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{7}{12}. \end{aligned}$$

F3. Döntse el, hogy az alábbi sorok Leibniz típusúak-e. Abszolút konvergensek a sorok?

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2 + 1}.$$

M3. A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor pontosan akkor Leibniz-sor, ha teljesül az alábbi három feltétel:

- a_n alternáló (váltakozó előjelű),
- $a_n \rightarrow 0$ (nullsorozat),
- $|a_n|$ monoton csökken.

(a) Itt mindhárom feltétel teljesül, tehát ez Leibniz-sor, így konvergens.

Az abszolút konvergenciához a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ sor konvergenciáját kell vizsgálni, azaz

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}},$$

ami divergens, mert tudjuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ sor pontosan akkor konvergens, ha $a > 1$. Így a sor nem abszolút konvergens.

(b) Világos, hogy alternáló (felhasználjuk, hogy $\frac{n}{n^2+1} > 0$), a határérték:

$$\frac{n}{n^2+1} = \frac{1}{n + \frac{1}{n}} \rightarrow \frac{1}{\infty} = 0.$$

A monotonitáshoz az $|a_n|$ és az $|a_{n+1}|$ -et kell összehasonlítani:

$$\begin{aligned} |a_n| - |a_{n+1}| &= \frac{n}{n^2+1} - \frac{n+1}{(n+1)^2+1} = \frac{n(n^2+2n+2) - (n+1)(n^2+1)}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} = \\ &= \frac{n^3+2n^2+2n - (n^3+n^2+n+1)}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} = \frac{n^2+n-1}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} > 0, \end{aligned}$$

azaz $|a_n| > |a_{n+1}|$, ami azt jelenti, hogy az $|a_n|$ sorozat monoton csökken. (A monotonitást jelen esetben egyszerűbben is láthattuk volna, ha a törtet n -nel egyszerűsítjük).

Tehát ez is egy Leibniz-sor, és így konvergens.

Az abszolút konvergenciához a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{n}{n^2+1} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$$

sort kell vizsgálni. Mivel

$$\frac{n}{n^2+1} \geq \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n},$$

és a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ sor divergens, így a minoráns kritérium szerint a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$ sor is divergens. Tehát az eredeti sor nem abszolút konvergens.

F4. Döntse el, hogy az alábbi sorok konvergensek, abszolút konvergensek vagy divergensek.

$$(a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}, \quad (b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}},$$

$$(c) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}, \quad (d) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n+1}{n+4} \right)^n.$$

M4. (a) A faktoriális miatt a hányados kritériummal érdemes próbálkozni:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1,$$

így a sor konvergens. Mivel pozitív tagú, így abszolút konvergens is.

(b) Mivel $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \geq \frac{1}{\sqrt{n \cdot 2n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{n}$, és a $\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sor divergens, így

a minoráns kritérium szerint a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ sor is divergens. Így nem is abszolút konvergens.

(c) Ez is egy Leibniz-sor, mert a logaritmus függvény monoton nő (és $\ln(n) > 0$, ha $n \geq 2$). Az abszolút konvergenciához a

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\ln(n)} \right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$$

sor vizsgáljuk. Az $\ln(n) \leq n$ egyenlőtlenségből $\frac{1}{\ln(n)} \geq \frac{1}{n}$. Mivel a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ sor

divergens, így a minoráns kritérium szerint a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$ sor is divergens, azaz

a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ sor nem abszolút konvergens.

(d) Egy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergenciájának szükséges feltétele, hogy $a_n \rightarrow 0$, illetve $|a_n| \rightarrow 0$. Ellenőrizzük:

$$|a_n| = \left(\frac{n+1}{n+4} \right)^n = \left(\frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{4}{n}} \right)^n \rightarrow \frac{e}{e^4} = e^{-3} \neq 0,$$

így a sor divergens (és nem abszolút konvergens).