

## 6. gyakorlat megoldásai

### Komplex számok, sajátértékek, sajátvektorok

**F1.** Legyen  $z_1 = 3 + 2i$  és  $z_2 = 1 - 3i$ . Számoljuk ki az alábbiakat:

$$z_1 + z_2, \quad z_1 - z_2, \quad z_1 z_2, \quad \frac{z_1}{z_2}, \quad \bar{z}_1, \quad |z_1|.$$

**M1.** A szorzásnál használjuk, hogy  $i^2 = -1$ , míg az osztásnál a nevező konjugáltjával bővítjük a törtet:

$$z_1 + z_2 = (3 + 2i) + (1 - 3i) = (3 + 1) + (2 - 3)i = 4 - i,$$

$$z_1 - z_2 = (3 + 2i) - (1 - 3i) = (3 - 1) + (2 - (-3))i = 2 + 5i,$$

$$z_1 z_2 = (3 + 2i) \cdot (1 - 3i) = 3 - 9i + 2i - 6i^2 = 9 - 7i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + 2i}{1 - 3i} = \frac{(3 + 2i)(1 + 3i)}{(1 - 3i)(1 + 3i)} = \frac{3 + 9i + 2i + 6i^2}{1 + 3i - 3i - 9i^2} = \frac{-3 + 11i}{10} = -0,3 + 1,1i,$$

$$\bar{z}_1 = 3 - 2i,$$

$$|z_1| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}.$$

**F2.** Legyen  $z = -1 + i$ . Írjuk fel trigonometrikus alakban, majd számoljuk ki a negyedik hatványát és a harmadik gyökeit.

**M2.** A  $z = -1 + i$  komplex szám abszolútértéke:  $r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$  és argumentuma:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{-1} + \pi = \operatorname{arctg}(-1) + \pi = \frac{3\pi}{4},$$

ahol a  $+\pi$  tag azért kell, mert  $\operatorname{Re} z = -1 < 0$ . Így a trigonometrikus alak:

$$z = \sqrt{2} (\cos(135^\circ) + i \sin(135^\circ)).$$

Ennek segítségével:

$$\begin{aligned} z^4 &= \left(\sqrt{2}\right)^4 (\cos(4 \cdot 135^\circ) + i \sin(4 \cdot 135^\circ)) = 4 (\cos(540^\circ) + i \sin(540^\circ)) = \\ &= 4 (\cos(180^\circ) + i \sin(180^\circ)) = -4 \end{aligned}$$

A  $z$  komplex számnak három  $z_1, z_2, z_3$  köbgyöke van:

$$z_1 = \sqrt[3]{\sqrt{2}} \left( \cos\left(\frac{135^\circ}{3}\right) + i \sin\left(\frac{135^\circ}{3}\right) \right) = \sqrt[6]{2} (\cos(45^\circ) + i \sin(45^\circ)) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}i,$$

$$z_2 = \sqrt[3]{\sqrt{2}} \left( \cos\left(\frac{135^\circ + 360^\circ}{3}\right) + i \sin\left(\frac{135^\circ + 360^\circ}{3}\right) \right) = \sqrt[6]{2} (\cos(165^\circ) + i \sin(165^\circ)),$$

$$z_3 = \sqrt[3]{\sqrt{2}} \left( \cos\left(\frac{135^\circ + 720^\circ}{3}\right) + i \sin\left(\frac{135^\circ + 720^\circ}{3}\right) \right) = \sqrt[6]{2} (\cos(285^\circ) + i \sin(285^\circ)).$$

**F3.** Keressük meg a  $z^2 - 6z + 13 = 0$  polinom gyökeit a komplex számok körében.

**M3.** Bár ennek a másodfokú egyenletnek negatív a diszkrimánsa, és így nincsenek valós gyökei, a komplex számok körében van két gyöke, melyet a szokásos megoldóképlettel számolhatunk:

$$z_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 13}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{6 \pm 4i}{2} = 3 \pm 2i,$$

ahol felhasználtuk, hogy pozitív  $q$  valós szám esetén  $\sqrt{-q} = \sqrt{q}i$ .

**F4.** Határozza meg az alábbi mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait.

$$(a) \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad (b) \begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

**M4.** (a) A sajátértékeket az alábbi determináns nullhelyei adják:

$$\det \begin{pmatrix} 5 - \lambda & 6 \\ 3 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = (5 - \lambda)(2 - \lambda) - 3 \cdot 6 = \lambda^2 - 7\lambda - 8,$$

melynek a gyökei  $\lambda_1 = 8$  és  $\lambda_2 = -1$ . Egy  $\lambda$  sajátértékhez a sajátérvektort az  $A - \lambda E_n = \mathbf{0}$  homogén egyenletrendszer megoldásával kaphatjuk meg, mely a  $\lambda_1 = 8$  esetén a következő:

$$\left[ \begin{array}{cc|c} -3 & 6 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{s_1/(-3)} \sim \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{s_2 - 3s_1} \sim \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Tehát az  $x_2$  a szabad paraméter, és  $x_1 = 2x_2$ . Így a sajátvektorok halmaza:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2x \\ x \end{bmatrix} \mid x \neq 0 \right\}.$$

A  $\lambda_2 = -1$  esetben hasonlóan számolhatunk:

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 6 & 6 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{s_1/6} \sim \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{s_2 - 3s_1} \sim \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Tehát az  $x_2$  a szabad paraméter, és  $x_1 = -x_2$ . Így a sajátvektorok halmaza:

$$\left\{ \begin{bmatrix} -x \\ x \end{bmatrix} : x \neq 0 \right\}.$$

(b) A sajátértékeket az alábbi determináns nullhelyei adják:

$$\det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 & -5 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & 2 & -3-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)(1-\lambda)(-3-\lambda) + 4 + 10 + 10(1-\lambda) + \\ + 2(-3-\lambda) - 2(4-\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 11\lambda - 12 + 14 + 10 - 10\lambda - 6 - 2\lambda - 8 + 2\lambda = \\ = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2.$$

Ennek a racionális gyökei a  $-2$  osztói közül kerülnek ki, így próbálgatással azt találjuk, hogy  $\lambda_1 = 1$  gyök, melyet így kiemelhetünk:

$$-\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + \lambda + 2)$$

A kapott másodfokú polinomnak a gyökei:  $\lambda_2 = -1$  és  $\lambda_3 = 2$ . Tehát a mátrix sajátértékei:  $1, -1, 2$ . A sajátértékekhez a sajátvektorokat hasonlóan számolhatjuk, mint az (a) feladatban:

$\lambda_1 = 1$  esetén:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{s_1 \leftrightarrow s_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -5 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{s_1/(-1)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -5 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} s_2 - 3s_1 \\ \sim \\ s_3 - 2s_1 \end{array} \\ \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{s_2/2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{s_3 - 2s_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

A  $\lambda_1 = 1$  sajátértékekhez tartozó sajátvektorok halmaza:

$$\left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \end{bmatrix} : x \neq 0 \right\}.$$

Hasonlóan  $\lambda_2 = -1$  esetén:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & -5 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{s_1 \leftrightarrow s_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -5 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{s_1/(-1)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & -5 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} s_2 - 5s_1 \\ \sim \\ s_3 - 2s_1 \end{array} \\ \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{s_2/12} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} s_1 + 2s_2 \\ \sim \\ s_3 - 6s_2 \end{array} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Tehát  $x_2 = 0$ , és  $x_3$  a szabad paraméter, és  $x_1 = x_3$ . Így a  $\lambda_2 = -1$  sajátértékekhez tartozó sajátvektorok halmaza:

$$\left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ x \end{bmatrix} : x \neq 0 \right\}.$$

Végül  $\lambda_3 = 2$  esetén:

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -5 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -5 & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{s_3-s_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -5 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{s_1 \leftrightarrow s_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{s_1/(-1)} \\ \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{s_2-2s_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{s_2/(-3)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] & \xrightarrow{s_1+s_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Tehát  $x_3 = 0$  és  $x_2$  a szabad paraméter, és  $x_1 = -x_2$ . Így a  $\lambda_3 = 2$  sajátértékekhez tartozó sajátvektorok halmaza:

$$\left\{ \left[ \begin{array}{c} -x \\ x \\ 0 \end{array} \right] : x \neq 0 \right\}.$$

**F5.** Tudjuk, hogy az  $A = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ a & 4 \end{bmatrix}$  mátrix egyik sajátvektora  $\mathbf{v}_1 = (1, 2)$ . Határozza meg az  $a$  paraméter értékét, a sajátértékeket, és a másik sajátvektort.

**M5.** Ha  $\lambda_1$  a  $\mathbf{v}_1$  sajátvektorhoz tartozó sajátérték, akkor  $A\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1$ , azaz

$$A\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ a & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ a+8 \end{bmatrix},$$

amiből  $\lambda_1 = 3$ , és ekkor  $a+8 = 3 \cdot 2$ , amiből  $a = -2$ . Innen az előző feladathoz hasonlóan kiszámolhatjuk az  $A$  mátrix sajátértékeit:

$$\det \begin{pmatrix} 7-\lambda & -2 \\ -2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (7-\lambda)(4-\lambda) - (-2) \cdot (-2) = \lambda^2 - 11\lambda + 24,$$

melynek a másik gyöke:  $\lambda_2 = 8$ . Ehhez sajátvektor:

$$\left[ \begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{s_1/(-1)} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{s_2+2s_1} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Így a sajátvektorok halmaza:

$$\left\{ \left[ \begin{array}{c} -2x \\ x \end{array} \right] : x \neq 0 \right\}.$$

Megjegyzés: lehet tudni, hogy a (főátlóra) szimmetrikus mátrixok sajátvektorai merőlegesek egymásra, tehát ha ismerjük a  $\mathbf{v}_1$ -et, akkor  $\mathbf{v}_2 = (-2, 1)$ , melynek segítségével az  $A\mathbf{v}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_2$  egyenletből megkaphatjuk, hogy  $\lambda_2 = 8$ .