5. gyakorlat megoldásai
Mátrixok rangja és determinánsa

F1. Határozza meg a

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrix rangját.

M1. Sor- és oszloptranszformációkkal alakíthatjuk a mátrixok például így:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 6 & 3 \end{bmatrix} \overset{s_1\cdot(-1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 6 & 3 \end{bmatrix} \underset{s_3+3s_1}{\overset{s_2+2s_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{o_4+o_1}{\overset{o_3+2o_1}{\sim}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{s_2-2s_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Az utolsó mátrixban csak 0 és 1 szerepel, és minden sorban és minden oszlopban legfeljebb egy darab egyes. Így a mátrix rangja az itt levő egyesek száma, ami 2.

F2. Határozza meg az

$$\mathbf{a}_1 := \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 := \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 := \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 := \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

vektorok által generált altér dimenzióját.

M2. A generált altér dimenziója annyi, mint a belőlük kiválasztható lineárisan független vektorok maximális száma. Ehhez az általuk alkotott mátrix rangját kell kiszámolni az előző feladathoz hasonlóan:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{bmatrix} \overset{s_1\cdot(-1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{bmatrix} \underset{s_3-3s_1}{\overset{s_2-2s_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 2 \\ 0 & 7 & 15 & 1 \end{bmatrix} \underset{o_3+3o_1}{\overset{o_2+2o_1}{\sim}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 2 \\ 0 & 7 & 15 & 1 \end{bmatrix} \overset{s_2/2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 15 & 1 \end{bmatrix} \overset{s_3-s_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 11 & 0 \end{bmatrix} \underset{o_3-4o_4}{\overset{o_2-2o_4}{\sim}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 11 & 0 \end{bmatrix} \overset{o_2/5}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 11 & 0 \end{bmatrix} \overset{o_3-11o_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Itt 3 darab egyes van, tehát a mátrix rangja 3, így ennyi a generált altér dimenziója is.

F3. Számítsa ki az alábbi mátrixok determinánsát.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 10 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

M3. (a) A 2×2-es determinánst az elemekből egyszerűen számolhatjuk:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2.$$

(b) A 3×3-as determinánst is számolhatjuk közvetlenül (Sarrus-szabály):

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 4 + (-2) \cdot 5 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \cdot 1 - 3 \cdot 4 \cdot 1 - 1 \cdot 5 \cdot 1 - (-2) \cdot (-1) \cdot 4 =$$
$$= 16 - 10 - 3 - 12 - 5 - 8 = -22.$$

Kicsit egyszerűbb, ha sortranszformáció után kifejtjük az első oszlop szerint:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \overset{s_2+s_1}{\underset{s_3-s_1}{=}} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (2 \cdot 1 - 8 \cdot 3) = -22.$$

(c) Sor- és oszloptranszformációkat végzünk (determináns számolásánál sorok, oszlopok osztásánál a megfelő számmal kell szorozni a következő determinánst, illetve cserénél (-1)-gyel):

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & 10 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} \overset{s_1\cdot(-1)}{=} (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 10 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} \overset{s_2-3s_1}{\underset{\substack{s_3-s_1 \\ s_4-2s_1}}{=}} (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 10 \end{vmatrix} \overset{s_2\leftrightarrow s_3}{=}$$
$$= (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & 10 \end{vmatrix} \overset{s_3+s_2}{\underset{s_4-s_2}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 18 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} \overset{s_3/2}{=} 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} \overset{s_4+2s_3}{=}$$
$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 23 \end{vmatrix} = 2 \cdot 23 = 46,$$

ahol a végén használtuk, hogy felső háromszög mátrixok determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

F4. Milyen λ valós paraméterek esetén invertálható az alábbi mátrix:

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & 9 \\ -1 & 3 & -5 \\ 3 & -9 & \lambda \end{bmatrix}?$$

Egy alkalmas λ esetére írja fel a mátrix inverzét is.

M4. Mivel egy négyzetes mátrix pontosan akkor invertálható, ha a determinánsa nem 0, így számoljuk ki a determinánst a λ függvényében:

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 9 \\ -1 & 3 & -5 \\ 3 & -9 & \lambda \end{vmatrix} = 6\lambda + 75 + 81 - 81 - 90 - 5\lambda = \lambda - 15.$$

Tehát $\lambda \neq 15$ esetén invertálható ez a mátrix.

Legyen $\lambda = 16$. Ebben az esetben a mátrix inverzét sortranszformációs módszerrel számoljuk:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & -5 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -9 & 16 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{s_1 \leftrightarrow s_2}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 3 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -9 & 16 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{s_1 \cdot (-1)}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & 5 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -5 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -9 & 16 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{s_3 - 3s_1}{\overset{s_2 - 2s_1}{\sim}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & 5 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right] \underset{s_2 + s_3}{\overset{s_1 - 5s_3}{\sim}}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & 0 & 0 & -16 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right] \overset{s_1 + 3s_2}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right].$$

Tehát

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & 9 \\ -1 & 3 & -5 \\ 3 & -9 & 16 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$