

3. gyakorlat megoldásai

Lineárisan összefüggő és független vektorrendszerek. Alterek

F1. Döntse el, hogy a következő \mathbb{R}^3 -beli vektorok lineárisan függetlenek-e vagy nem:

$$(a) \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}; \quad (b) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

M1. A $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ vektorok pontosan akkor lineárisan függetlenek, ha a $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ egyenlőségből következik, hogy $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$.

(a) A

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

pontosan azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ -3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 0\lambda_3 &= 0 \\ 3\lambda_1 - 3\lambda_2 - 3\lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

A második egyenletből $\lambda_2 = \frac{3}{2}\lambda_1$, melyet a másik kettő egyenletbe írva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 - \frac{3}{2}\lambda_1 + \lambda_3 &= 0 \\ 3\lambda_1 - 3 \cdot \frac{3}{2}\lambda_1 - 3\lambda_3 &= 0, \end{aligned}$$

azaz

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\lambda_1 + \lambda_3 &= 0 \\ -\frac{3}{2}\lambda_1 - 3\lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

A második egyenlet az első (-3) -szorososa, tehát ez tulajdonképpen csak egy egyenlet. Ennek egy (nemnulla) megoldása például a $\lambda_1 = 2, \lambda_3 = -1$. Ekkor

$\lambda_2 = \frac{3}{2}\lambda_1 = 3$. Ellenőrizhető, hogy ez az eredeti egyenletrendszer megoldása is, azaz

$$2 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

mely mutatja, hogy ezen vektorok nem lineárisan függetlenek, azaz lineárisan összefüggőek.

(b) A

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

pontosan azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

A harmadik egyenletből az első egyenlet kétszeresét kivonva kapjuk, hogy $-\lambda_2 = 0$, azaz $\lambda_2 = 0$. Ekkor a második egyenletből $2\lambda_3 = 0$, azaz $\lambda_3 = 0$. Ekkor az első egyenletet felhasználva kapjuk, hogy $\lambda_1 = 0$. Tehát (1)-ből következik, hogy $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, ami azt jelenti, hogy ezen vektorok lineárisan függetlenek.

F2. Tekintsük az \mathbb{R}^3 tér

$$\mathbf{a} := (1, 3, 4), \quad \mathbf{b} := (2, 7, 2), \quad \mathbf{c} := (-1, 2, 1)$$

vektorait. Döntse el, hogy az $\mathbf{x} := (-3, 1, -2)$ vektor benne van-e a vektorok által generált — az $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$ szimbólummal jelölt — altérben.

M2. Az \mathbf{x} vektor pontosan akkor van benne az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ által generált altérben, ha a lineáris kombinációjukkal felírható, azaz léteznek α, β, γ valós számok, hogy $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = \mathbf{x}$, azaz

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Ez a következő egyenletrendszert adja:

$$\begin{aligned} \alpha + 2\beta - \gamma &= -3 \\ 3\alpha + 7\beta + 2\gamma &= 1 \\ 4\alpha + 2\beta + \gamma &= -2. \end{aligned}$$

A második egyenletből az első háromszorosát, és a harmadik egyenletből az első négyszeresét kivonva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\beta + 5\gamma &= 10 \\ -6\beta + 5\gamma &= 10.\end{aligned}$$

A két egyenlet különbsége $7\beta = 0$, amiből $\beta = 0$. Így $5\gamma = 10$, azaz $\gamma = 2$. Az eredeti első egyenletből kapjuk, hogy $\alpha = -3 - 2\beta + \gamma = -3 + 2 = -1$. Tehát $-\mathbf{a} + 0\mathbf{b} + 2\mathbf{c} = \mathbf{x}$, azaz az \mathbf{x} vektor benne van az $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ által generált altérben.

Mátrixok

F3. Az alábbi mátrixok közül melyeket tudjuk összeszorozni? Számítsa ki néhány szorzás eredményét! Írjuk fel a mátrixok transzponáltját is!

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} := \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

M3. Az $m_1 \times k_1$ -es és az $m_2 \times k_2$ -es mátrixokat pontosan akkor tudjuk összeszorozni, ha $k_1 = m_2$. Mivel az \mathbf{A} mátrix 2×2 -es, a \mathbf{B} 3×2 -es, a \mathbf{C} 2×3 -as, és a \mathbf{D} 3×1 -es, így az $\mathbf{AC}, \mathbf{BA}, \mathbf{BC}, \mathbf{CB}, \mathbf{CD}$ szorzatok értelmesek. Ezek eredménye (ha nem számoltam el):

$$\begin{aligned}\mathbf{AC} &= \begin{bmatrix} 7 & 3 & 10 \\ -4 & -2 & -8 \end{bmatrix}, & \mathbf{BA} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 0 \\ -9 & -1 \end{bmatrix}, & \mathbf{BC} &= \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & -10 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{CB} &= \begin{bmatrix} -2 & 18 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, & \mathbf{CD} &= \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

A mátrixok transzponáltjai:

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}^T = [2 \quad -2 \quad 1].$$