

3. gyakorlat

Lineárisan összefüggő és független vektorrendszerek. Alterek

F1. Döntse el, hogy a következő \mathbb{R}^3 -beli vektorok lineárisan függetlenek-e vagy nem:

$$(a) \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}; \quad (b) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

F2. Tekintsük az \mathbb{R}^3 tér

$$\mathbf{a} := (1, 3, 4), \quad \mathbf{b} := (2, 7, 2), \quad \mathbf{c} := (-1, 2, 1)$$

vektorait. Döntse el, hogy az $\mathbf{x} := (-3, 1, -2)$ vektor benne van-e a vektorok által generált — az $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$ szimbólummal jelölt — altérben.

Mátrixok

F3. Az alábbi mátrixok közül melyeket tudjuk összeszorozni? Számítsa ki néhány szorzás eredményét! Írjuk fel a mátrixok transzponáltját is!

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} := \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Opcionális

F4. Igazolja, hogy az \mathbb{R}^4 tér

$$M := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 3x_2 = 5x_3 - x_4\}$$

részhalmaza egy altér \mathbb{R}^4 -ben. Hány dimenziós ez az altér? Adja meg egy bázisát.

F5. Határozza meg mindazon \mathbf{B} mátrixokat, amelyek az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrixszal felcserélhetők.