2. gyakorlat megoldásai
Vektorok és koordinátageometria

F1. Számítsa ki az $\mathbf{a} = (0, -1, 5)$ és $\mathbf{b} = (-2, 1, 2)$ vektorok skaláris szorzatát és a két vektor hajlásszögét.

M1. A skaláris szorzatuk: $\mathbf{ab} = 0 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 9$.
A hajlásszöget a skaláris szorzatból számolhatjuk:

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}\right) = \arccos\left(\frac{9}{\sqrt{26} \cdot 3}\right) \approx 54^\circ$$

F2. Bontsa fel a $\mathbf{v} = (3, -1, 5)$ vektort az $\mathbf{a} = (3, 1, 0)$ vektorral párhuzamos és arra merőleges komponensek összegére.

M2. A párhuzamos komponens az előadon tanult formulával:

$$\mathbf{v}_{||} = \frac{\mathbf{av}}{\mathbf{aa}}\mathbf{a} = \frac{8}{10}(3; 1; 0) = (2{,}4; 0{,}8; 0).$$

Ebből a merőleges komponens:

$$\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{||} = (3, -1, 5) - (2{,}4; 0{,}8; 0) = (0{,}6; -1{,}8; 5).$$

F3. Számítsa ki az $\mathbf{a} = (1, 3, -2)$ és $\mathbf{b} = (-1, 2, 0)$ vektorok vektoriális szorzatát, valamint az $A(0, 0, 0), B(1, 3, -2), C(-1, 2, 0)$ csúcspontú háromszög területét.

M3. $(1, 3, -2) \times (-1, 2, 0) = (3 \cdot 0 - (-2) \cdot 2, (-2) \cdot (-1) - 1 \cdot 0, 1 \cdot 2 - 3 \cdot (-1)) =$ $= (4, 2, 5)$. Mivel $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ és $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$, így az ABC háromszög területe fele az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ által kifeszített paralelogramma területének. Utóbbi pontosan az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vektor hossza, ami $\sqrt{4^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$. Így a háromszög területe $\frac{3\sqrt{5}}{2} \approx 3,35$.

F4. Határozza meg az $\mathbf{a} = (2, -1, 5)$, $\mathbf{b} = (-1, 0, 4)$ és $\mathbf{c} = (0, 2, -3)$ vektorok $\mathbf{abc}$ vegyes szorzatát, valamint a vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatát.

M4. $\mathbf{abc} = 2 \cdot 0 \cdot (-3) + (-1) \cdot 4 \cdot 0 + 5 \cdot (-1) \cdot 2 - 5 \cdot 0 \cdot 0 - (-1) \cdot (-1) \cdot (-3) - 2 \cdot 4 \cdot 2 =$ $= 0 + 0 - 10 - 0 + 3 - 16 = -23$. Az általuk kifeszített paralelepipedon térfogata ennek abszolút értéke, azaz 23.

F5. Írja fel a $P_0(1,2,4)$ ponton átmenő $\mathbf{n} = (2,1,3)$ normálvektorú sík egyenletét.

M5. Az $\mathbf{n}$ normálvektorú sík egyenlete $2x + y + 3z = c$, ahol a c konstans úgy határozzuk meg, hogy a P_0 pont rajta legyen a síkon. Azaz $c = 2 \cdot 1 + 2 + 3 \cdot 4 = 16$, így a kérdéses sík egyenlete $2x + y + 3z = 16$.

F6. Írja fel a $P(3,4,6)$ ponton átmenő $\mathbf{n} = (1,-2,1)$ normálvektorú sík egyenletét, és számítsa ki a $Q(-1,5,4)$ pontnak ettől a síktól vett távolságát.

M6. A sík egyenlete az előző feladathoz hasonlóan: $x - 2y + z = 1$. Ennek a Hesse-féle normálegyenlete:

$$\frac{x - 2y + z - 1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = 0.$$

A Q pontnak ettől a síktól való távolságát a hasonló formulából számolhatjuk:

$$\left| \frac{-1 - 2 \cdot 5 + 4 - 1}{\sqrt{6}} \right| = \left| \frac{-8}{\sqrt{6}} \right| = \frac{8}{\sqrt{6}} \approx 3,27.$$

F7. Mutassa meg, hogy a $3x + y - z = 1$ és a $6x + 2y - 2z = 1$ síkok párhuzamosak, és határozza meg a két sík távolságát.

M7. Az első sík normálvektora $\mathbf{n}_1 = (3,1,-1)$, míg a másodiké $\mathbf{n}_2 = (6,2,-2)$. Látható, hogy $\mathbf{n}_2 = 2\mathbf{n}_1$, azaz a két sík valóban párhuzamos. A két sík távolságának a kiszámításához válasszunk egy Q pontot az első síkról. Legyen mondjuk $Q(0,1,0)$, mert ez rajta van a síkon, kielégíti az egyenletet: $3 \cdot 0 + 1 - 0 = 1$. A két párhuzamos sík távolsága a Q pont távolsága a második síktól, ami

$$\left| \frac{6 \cdot 0 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 1}{\sqrt{6^2 + 2^2 + (-2)^2}} \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{44}} \right| = \frac{1}{2\sqrt{11}} \approx 0,151.$$