

1. feladatsor megoldása

1. (a) A végtelenig való integrálást határértékként írjuk fel:

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{(1-x)^3} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_3^b (1-x)^{-3} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{(1-x)^{-2}}{-2} \right]_3^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{(1-b)^{-2}}{2} - \frac{(1-3)^{-2}}{2} = -\frac{1}{8}.$$

- (b) Először az integrált számoljuk ki parciális törtekre bontással. Mivel $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$, így

$$\frac{6}{x^2 + x - 2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

alakba szeretnénk átírni, ahol az A, B együtthatókat beszorzás után kapott egyenletrendszerből kapjuk:

$$\begin{aligned} 6 &= A(x+2) + B(x-1) \\ 6 &= (A+B)x + 2A - B, \end{aligned}$$

amiből $A+B=0$, és $2A-B=6$. Ebből $A=2, B=-2$, és így

$$\int \frac{6}{x^2 + x - 2} dx = \int \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x+2} dx = 2 \ln|x-1| - 2 \ln|x+2| + C = 2 \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C.$$

Ezzel a feladat improprius integrálja:

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} \frac{6}{x^2 + x - 2} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{6}{x^2 + x - 2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[2 \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| \right]_2^b = \lim_{b \rightarrow \infty} 2 \ln \left| \frac{b-1}{b+2} \right| - 2 \ln \left| \frac{2-1}{2+2} \right| = \\ &= -2 \ln \left(\frac{1}{4} \right) = 4 \ln 2 \approx 2,77, \end{aligned}$$

mert

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b-1}{b+2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{b}}{1 + \frac{2}{b}} = 1.$$

- (c) Először az integrált számoljuk ki parciális integrálással:

$$\int x e^{-2x} dx = x \frac{e^{-2x}}{-2} - \int \frac{e^{-2x}}{-2} dx = -\frac{x e^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} + C.$$

Ezzel az improprius integrál:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x e^{-2x} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b x e^{-2x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{x e^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} \right]_0^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} -\frac{b e^{-2b}}{2} - \frac{e^{-2b}}{4} - \left(-\frac{0 e^{-2 \cdot 0}}{2} - \frac{e^{-2 \cdot 0}}{4} \right) = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{2x}} \rightsquigarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{2x} \cdot 2} = 0$$

a L'Hospital-szabály alkalmazásával.

2. (a) A függvény 1-ben „száll el”, így azt kell „óvatosan”, azaz határértékkel megközelíteni:

$$\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} dx = \lim_{b \rightarrow 1^-} \int_0^b (x-1)^{-\frac{2}{3}} dx = \lim_{b \rightarrow 1^-} \left[\frac{(x-1)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} \right]_0^b = \lim_{b \rightarrow 1^-} 3(b-1)^{\frac{1}{3}} - 3 \cdot (0-1)^{\frac{1}{3}} = 3.$$

(b) Itt a -2 -ben van „probléma”:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^0 \frac{6}{\sqrt{4+2x}} dx &= \lim_{a \rightarrow -2^+} \int_a^0 6(4+2x)^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{a \rightarrow -2^+} \left[\frac{6(4+2x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} \right]_a^0 = \\ &= \lim_{a \rightarrow -2^+} 6(4+2a)^{\frac{1}{2}} - 6(4+2 \cdot 0)^{\frac{1}{2}} = 12. \end{aligned}$$

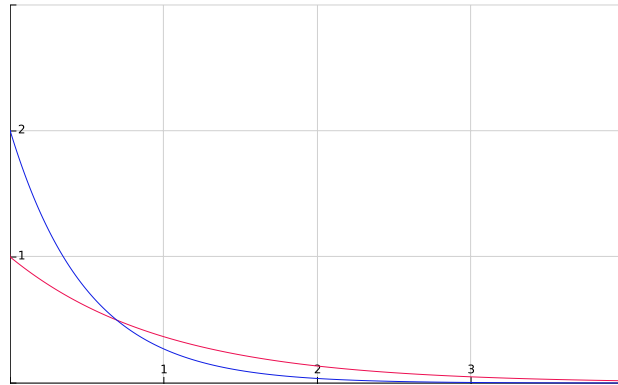
(c) Először integrálunk, melyhez visszavezetjük arra, amit tudunk (majd lineáris helyettesítés):

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{4}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} dx = \frac{1}{2} \cdot 2 \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + C = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + C.$$

Ezzel az improprius integrál (a függvény a 2-ben tart a végtelenhez):

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \lim_{b \rightarrow 2^-} \int_0^b \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \lim_{b \rightarrow 2^-} \left[\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) \right]_0^b = \lim_{b \rightarrow 2^-} \arcsin\left(\frac{b}{2}\right) - \arcsin\left(\frac{0}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

3. Deriválással kapjuk, hogy pozitív λ esetén f_λ konkáv. Továbbá igaz, hogy $f_\lambda(0) = \lambda$, és $\lim_{x \rightarrow \infty} f_\lambda = 0$. Ezek alapján ábrázolhatjuk a függvényeket még azt is felhasználva, hogy nagyobb λ esetén f_λ gyorsabban tart a 0-hoz.



Az improprius integrál:

$$\int_0^{+\infty} f_\lambda(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \lambda e^{-\lambda x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-e^{-\lambda x} \right]_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} -e^{-\lambda b} - \left(-e^{-\lambda \cdot 0} \right) = 1.$$