13. gyakorlat megoldásai
Hármas integrálok

F1. Számítsuk ki az alábbi háromváltozós függvények integrálját a megadott térrészben:

(a) $f(x, y, z) = x^2 + y - z, \quad 0 \le x \le 2;\ 0 \le y \le 1;\ 0 \le z \le 3$

(b) $f(x, y, z) = x - 2y + 4z, \quad x = 0;\ y = 0;\ z = 0;$ és $x + y + z = 1$ síkok közötti rész

M1. (a)

$$\int_0^2 \int_0^1 \int_0^3 x^2 + y - z \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \int_0^1 \left[x^2 z + yz - \frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^3 \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^2 \int_0^1 3x^2 + 3y - \frac{9}{2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \left[3x^2 y + 3\frac{y^2}{2} - \frac{9}{2}y\right]_{y=0}^1 \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^2 3x^2 + \frac{3}{2} - \frac{9}{2}\,\mathrm{d}x = \int_0^2 3x^2 - 3\,\mathrm{d}x = [x^3 - 3x]_{x=0}^2 = 8 - 6 = 2$$

(b) Az integrálási tartomány egy T tetraéder, melynek a csúcsai $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ és $(0, 0, 1)$. Ennek a vetülete az xy koordinátasíkra a $(0, 0)$, $(1, 0)$ és $(0, 1)$ csúcsú háromszög. Ennek átfogójának egyenlete $x + y = 1$ avagy $y = 1 - x$. Az x változó így 0 és 1 között fut, míg adott x mellett az y 0 és $1 - x$ között. Adott (x, y) párra a z változó 0 és $1 - x - y$ között lehet. Így a kérdéses integrál:

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x - 2y + 4z \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^{1-x} [xz - 2yz + 2z^2]_{z=0}^{1-x-y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} x(1 - x - y) - 2y(1 - x - y) + 2(1 - x - y)^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} 2 - 3x - 6y + x^2 + 4y^2 + 5xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 \left[2y - 3xy - 3y^2 + x^2 y + 4\frac{y^3}{3} + 5x\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{1-x} \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 2(1 - x) - 3x(1 - x) - 3(1 - x)^2 + x^2(1 - x) + 4\frac{(1 - x)^3}{3} + 5x\frac{(1 - x)^2}{2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{3} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^3\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{24}x^4\right]_{x=0}^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{24} = \frac{1}{8}$$

Ugyanerre az eredményre jutunk, ha meggondoljuk, hogy a T tetraéder tömegközéppontja a $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, míg a tömege ($\varrho = 1$ esetén) $\frac{1}{6}$, így a nyomatékai $m_x = m_y = m_z = \frac{1}{24}$. Ez azt jelenti, hogy

$$\iiint_T x \,\mathrm{d}(x,y,z) = \iiint_T y \,\mathrm{d}(x,y,z) = \iiint_T z \,\mathrm{d}(x,y,z) = \frac{1}{24}.$$

Ebből a kérdéses integrál $\frac{1}{24} - \frac{2}{24} + \frac{4}{24} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$.

F2. Alkalmas koordináták bevezetésével határozzuk meg a felületek által határolt, illetve az egyenlőtlenségek által meghatározott tartományok térfogatát:

(a) $z = 4 + x + 2y, \quad z = 0, \quad x^2 + y^2 = 1$

(b) $0 \le z \le \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

(c) $0 \le z \le \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 \le 4$

(d) $x^2 + y^2 + z^2 \le 1, \quad \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le \sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2}$

(e) $z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 6 - x^2 - y^2$

M2. Ha egy V tartomány térfogatát szeretnénk kiszámolni, akkor a V tartományon kell integrálni az 1 függvényt.

Ha nem a derékszögű koordinátákat használjuk, akkor az egyik lehetőség az (r, φ, m) hengerkoordináták, melyekből a derékszögű koordináták:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = m$$

A Jacobi-determináns abszolút értéke a hengerkoordináták esetén: r (ezzel még meg kell szorozni az integrálandó függvényt).

A másik lehetőség az (r, φ, θ) gömbi koordináták használata, melyekből a derékszögű koordináták:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = \cos\theta$$

A Jacobi-determináns abszolút értéke a gömbi koordináták esetén: $r^2\sin\theta$.

(a) Itt hengerkoordinátákat használunk:

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{4+r\cos\varphi+2r\sin\varphi} 1r \,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (4 + r\cos\varphi + 2r\sin\varphi) r \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} 4r + r^2\cos\varphi + 2r^2\sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \int_0^1 [4r + r^2\sin\varphi - 2r^2\cos\varphi]_{\varphi=0}^{2\pi}\,\mathrm{d}r =$$

$$= \int_0^1 8r\pi \,\mathrm{d}r = [4r^2\pi]_{r=0}^1 = 4\pi$$

(b) A megadott feltétel elvivalens azzal, hogy $x^2+y^2+z^2 \leq 4$ és $0 \leq z$. Ez egy 2 sugarú (felső) félgömb, azaz a gömbi koordinátákat használjuk:

$$\int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r = \int_0^2 \int_0^{2\pi} [-r^2 \cos\theta]_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r =$$

$$\int_0^2 \int_0^{2\pi} r^2 \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r = \int_0^2 2\pi r^2 \, \mathrm{d}r = \left[2\pi \frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^2 = \frac{16\pi}{3}$$

(c) A második feltétel sugallja, hogy itt a hengerkoordinátákat kell használni:

$$\int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^r 1 r \, \mathrm{d}m \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r = \int_0^2 \int_0^{2\pi} r^2 \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r = \int_0^2 2\pi r^2 \, \mathrm{d}r = \left[2\pi \frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^2 = \frac{16\pi}{3}$$

(d) Az első feltétel mutatja, hogy egy gömbön belül vagyunk, így a gömbi koordinátákat használjuk:

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} 1 r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r = \int_0^1 \int_0^{2\pi} [-r^2 \cos\theta]_{\theta=\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r = \int_0^1 2\pi r^2 \left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}\right) \mathrm{d}r =$$

$$= \int_0^1 r^2 \pi \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) \mathrm{d}r = \left[\frac{r^3}{3} \pi \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\right]_{r=0}^1 = \frac{\pi}{3}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$$

(e) Itt is hengerkoordinátákat kell használni. Ekkor $x^2+y^2 = r^2$, így a lehetséges legnagyobb r értékre $6-r^2 = r$, amiből $r=2$ (jelen esetben az $r=-3$ gyöknek nincs értelme).

$$\int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_r^{6-r^2} 1 r \, \mathrm{d}m \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r = \int_0^2 \int_0^{2\pi} (6-r^2-r) r \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r =$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} 6r - r^3 - r^2 \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r = \int_0^2 2\pi(6r - r^3 - r^2) \, \mathrm{d}r =$$

$$= 2\pi \left[3r^2 - \frac{r^4}{4} - \frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^2 = 2\pi\left(12 - 4 - \frac{8}{3}\right) = \frac{32\pi}{3}$$