12. gyakorlat megoldásai
Kettős integrálok

F1. Számítsuk ki az alábbi kétváltozós függvények integrálját a megadott tartományon.

(a) $f(x,y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2, \quad 1 \le x \le 2;\ 0 \le y \le 3$

(b) $f(x,y) = xe^y, \quad y = x^2$ és $y = x + 2$ között

(c) $f(x,y) = xy, \quad y = x,\ y = 3 - x$ és az x-tengely közötti háromszögön

M1. (a)

$$\int_1^2 \int_0^3 2x^2 + 3xy + 4y^2 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_1^2 \left[2x^2 y + 3x\frac{y^2}{2} + 4\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^3 \mathrm{d}x =$$

$$= \int_1^2 6x^2 + \frac{27}{2}x + 36 \,\mathrm{d}x = \left[6\frac{x^3}{3} + \frac{27}{2}\frac{x^2}{2} + 36x\right]_1^2 = \frac{281}{4}$$

(b) Az $y = x^2$ és az $y = x + 2$ meszéspontjainak x koordinátáira $x^2 = x + 2$, amiből $x_1 = -1$ és $x_2 = 2$. Az x változó e két határ között mozog, míg adott x esetén az y változó az x^2 és $x + 2$ között változik (ezen x-ekre $x^2 \le x + 2$):

$$\int_{-1}^2 \int_{x^2}^{x+2} xe^y \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_{-1}^2 \left[xe^y\right]_{y=x^2}^{x+2} \mathrm{d}x = \int_{-1}^2 xe^{x+2} - xe^{x^2} \,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[xe^{x+2} - e^{x+2} - \frac{e^{x^2}}{2}\right]_{-1}^2 = \frac{e^4}{2} + \frac{5}{2}e$$

(c) Kétféleképpen is számolhatunk. Az x változó 0 és 3 között vesz fel értékeket, és adott x-re az y változó 0 és x, illetve 0 és $3-x$ között változik attól függően, hogy x másfélnél kisebb vagy nagyobb. Ennek megfelelően kettőbontjuk az integrált, és külön vesszük az $x \in \left[0, \frac{3}{2}\right]$ és az $x \in \left[\frac{3}{2}, 3\right]$ esetet:

$$\int_0^{\frac{3}{2}} \int_0^x xy \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x + \int_{\frac{3}{2}}^3 \int_0^{3-x} xy \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{3}{2}} \left[x\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^x \mathrm{d}x + \int_{\frac{3}{2}}^3 \left[x\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{3-x} \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^{\frac{3}{2}} x\frac{x^2}{2} \,\mathrm{d}x + \int_{\frac{3}{2}}^3 x\frac{(3-x)^2}{2} \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{x^3}{2} \,\mathrm{d}x + \int_{\frac{3}{2}}^3 \frac{9}{2}x - 3x^2 + \frac{x^3}{2} \,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[\frac{x^4}{8}\right]_0^{\frac{3}{2}} + \left[\frac{9}{2}\frac{x^2}{2} - x^3 + \frac{x^4}{8}\right]_{\frac{3}{2}}^3 = \frac{27}{16}$$

A másik lehetőség, hogy először az x szerint integrálunk, azaz y befutja a $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ intervallumot, és egy adott y-ra az x változó y-tól $(3-y)$-ig fut:

$$\int_0^{\frac{3}{2}} \int_y^{3-y} xy \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{3}{2}} \left[\frac{x^2}{2} y\right]_{x=y}^{3-y} \mathrm{d}y = \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{(3-y)^2}{2} y - \frac{y^2}{2} y \,\mathrm{d}y =$$
$$= \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{9}{2} y - 3y^2 \,\mathrm{d}y = \left[\frac{9}{2}\frac{y^2}{2} - y^3\right]_0^{\frac{3}{2}} = \frac{27}{16}$$

F2. Cseréljük fel az integrálás sorrendjét, és számoljuk ki az alábbi integrálokat.

(a) $\displaystyle\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{1}{y^4+1} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \int_{y^2}^1 y \sin x^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$

M2. (a) Az integrálás sorendjének megcserélésekor meg kell gondolni, hogy hogyan változnak az integrálási határok. Ehhez célszerű ábrázolni, hogy hol integrálunk pontosan (az integrálandó függvény ebben a lépésben nem érdekes). Azért cseréljük meg az integrálás sorrendjét, mert így sokkal egyszerűbben kiszámolható integrálokat kapunk.

$$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{1}{y^4+1} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_0^2 \int_0^{y^3} \frac{1}{y^4+1} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_0^2 \left[\frac{1}{y^4+1} x\right]_{x=0}^{y^3} \mathrm{d}y = \int_0^2 \frac{y^3}{y^4+1} \,\mathrm{d}y =$$
$$= \left[\frac{\ln(y^4+1)}{4}\right]_0^2 = \frac{\ln(17)}{4} \approx 0,708$$

(b) Hasonlóan az (a) feladathoz:

$$\int_0^1 \int_{y^2}^1 y \sin(x^2) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} y \sin(x^2) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} \sin(x^2)\right]_{y=0}^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^1 \frac{x}{2} \sin(x^2) \,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\cos(x^2)}{4}\right]_0^1 = \frac{1-\cos(1)}{4} \approx 0,115$$

F3. Polárkoordináták segítségével számoljuk ki az alábbi integrálokat a megadott tartományon.

(a) $\displaystyle\iint_A x^3 y \,\mathrm{d}(x,y) \qquad A = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 4,\ 0 \le x,\ 0 \le y\}$

(b) $\displaystyle\iint_A x^2 + y^2 \,\mathrm{d}(x,y) \qquad A = \{(x,y) \mid 1 \le x^2+y^2 \le 9,\ 0 \le y,\ x \le y\}$

M3. Áttérünk polárkoordinátákra, azaz az x és az y koordináták helyett az origótól való távolságot (r) és a helyvektor x-tengellyel bezárt szögét (φ) használjuk (mint ahogy a komplex számok trigonometrikus alakjánál). Ekkor

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi.$$

Meg kell gondolni, hogy az adott A tartományt hogyan jellemezhetjük a polárkoordináták segítségével (segít, ha lerajzoljuk az A tartományt). Ha az integrálásnál áttérünk a polárkoordinátákra, akkor az integrálban megjelenik egy r szorzó (áttérés Jacobi-determinánsa) is.

(a) Ebben az esetben $0 \le r \le 2$ és $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$, így az integrál:

$$\iint_A x^3 y \,\mathrm{d}(x,y) = \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r\cos\varphi)^3 (r\sin\varphi) r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r = \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^5 \cos^3\varphi \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r =$$

$$= \int_0^2 \left[-r^5 \frac{\cos^4\varphi}{4} \right]_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}r = \int_0^2 \frac{r^5}{4} \,\mathrm{d}r = \left[\frac{r^6}{24} \right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

(b) Ebben az esetben $1 \le r \le 3$ és $\dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \pi$, így az integrál:

$$\iint_A x^2 + y^2 \,\mathrm{d}(x,y) = \int_1^3 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \left((r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 \right) r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r = \int_1^3 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} r^3 \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r =$$

$$= \int_1^3 [r^3\varphi]_{\varphi=\frac{\pi}{4}}^{\pi} \,\mathrm{d}r = \int_1^3 \frac{3\pi}{4} r^3 \,\mathrm{d}r = \left[\frac{3\pi}{4} \frac{r^4}{4} \right]_1^3 = 15\pi$$