

11. gyakorlat megoldásai

Lokális szélsőértékek

F1. Határozza meg az alábbi kétváltozós függvények lokális szélsőértékeit!

(a) $f(x, y) = 4x^2 + 2xy + 5y^2 + 2,$

(b) $f(x, y) = y^4 - 3y + x^2y + 2xy,$

(c) $f(x, y) = \frac{xy}{27} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y},$

(d) $f(x, y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - e^y.$

M1. (a) Először kiszámoljuk a függvény elsőrendű parciális deriváltjait:

$$f'_x(x, y) = 8x + 2y$$

$$f'_y(x, y) = 2x + 10y$$

A következő lépés, hogy megkeressük azokat a pontokat (stacionárius pontok), ahol mindkét parciális derivált nulla:

$$8x + 2y = 0$$

$$2x + 10y = 0$$

Az elsőből $y = -4x$, melyet a második helyettesítve $-38x = 0$, azaz $x = 0$, amiből $y = 0$. (Hivatkozhattunk volna arra is, hogy ez egy homogén lineáris egyenletrendszer, melynek az együtthatómátrixának a determinánsa nem nulla, így csak az azonosan 0 a megoldás.) Tehát egyetlen stacionárius pont van, a $(0, 0)$. Még meg kell nézni, hogy ez valóban lokális szélsőérték-e, amihez a Hesse-féle determinánst kell felírni a másodrendű parciális deriváltakból.

$$f''_{xx}(x, y) = 8$$

$$f''_{xy}(x, y) = 2$$

$$f''_{yy}(x, y) = 10$$

Ebből a Hesse-féle determináns:

$$f''_{xx}(x, y)f''_{yy}(x, y) - (f''_{xy}(x, y))^2 = 8 \cdot 10 - 2^2 = 76,$$

ami minden pontban pozitív, így a $(0, 0)$ valóban lokális szélsőérték, és mivel $f''_{xx}(x, y) = 8$ pozitív, így lokális minimum. A lokális minimum értéke: $f(0, 0) = 2$.

(b) Ugyanazokat a lépéseket kell megcsinálnunk, mint az (a) feladatban:

$$\begin{aligned}f'_x(x, y) &= 2xy + 2y \\f'_y(x, y) &= 4y^3 - 3 + x^2 + 2x\end{aligned}$$

A stacionárius pontok a következő egyenleteket kielégítő pontok:

$$\begin{aligned}2xy + 2y &= 0 \\4y^3 - 3 + x^2 + 2x &= 0\end{aligned}$$

Az első egyenletet szorzattá alakíthatjuk: $2y(x + 1) = 0$, amiből $y = 0$ vagy $x = -1$. Az $y = 0$ esetben a második egyenlet $-3 + x^2 + 2x = 0$, aminek a két gyöke 1 és -3 . Az $x = -1$ esetben a második egyenlet $4y^3 - 3 + 1 - 2 = 0$, azaz $y^3 = 1$, azaz $y = 1$. Tehát három stacionárius pont van: $(1, 0)$, $(-3, 0)$ és $(-1, 1)$. A Hesse-determinánshoz a másodrendű parciális deriváltak:

$$\begin{aligned}f''_{xx}(x, y) &= 2y \\f''_{xy}(x, y) &= 2x + 2 \\f''_{yy}(x, y) &= 12y^2\end{aligned}$$

Ebből a Hesse-determináns:

$$f''_{xx}(x, y)f''_{yy}(x, y) - (f''_{xy}(x, y))^2 = 2y \cdot 12y^2 - (2x + 2)^2 = 24y^3 - (2x + 2)^2$$

Minden stacionárius pontra kiszámoljuk ezt:

Az $(1, 0)$ pontban: $24 \cdot 0 - (2 + 2)^2 = -16$, ami negatív, tehát ez nem lokális szélsőérték (nyeregpont).

A $(-3, 0)$ pontban: $24 \cdot 0 - (2 \cdot (-3) + 2)^2 = -16$, ami negatív, tehát ez sem lokális szélsőérték (nyeregpont).

A $(-1, 1)$ pontban: $24 \cdot 1^3 - (2 \cdot (-1) + 2)^2 = 24$, ami pozitív, így ez lokális szélsőérték. Mivel $f''_{xx}(-1, 1) = 2$, ami pozitív, ez lokális minimum. A lokális minimum értéke: $f(-1, 1) = 1 - 3 + 1 - 2 = -3$.

(c) Az elsőrendű parciális deriváltak:

$$\begin{aligned}f'_x(x, y) &= \frac{y}{27} - \frac{1}{x^2} \\f'_y(x, y) &= \frac{x}{27} - \frac{1}{y^2}\end{aligned}$$

A stacionárius pontok egyenlete:

$$\begin{aligned}\frac{y}{27} - \frac{1}{x^2} &= 0 \\ \frac{x}{27} - \frac{1}{y^2} &= 0\end{aligned}$$

Ezekből $x^2y = 27$ és $xy^2 = 27$, melyeket összeszorozva $x^3y^3 = 27^2 = 3^6$. Ebből $xy = 3^2 = 9$. Ekkor

$$x = \frac{x^2y}{xy} = \frac{27}{9} = 3, \quad y = \frac{xy^2}{xy} = \frac{27}{9} = 3$$

Tehát egyetlen stacionárius pont van, a $(3, 3)$.

$$f''_{xx}(x, y) = \frac{2}{x^3}$$

$$f''_{xy}(x, y) = \frac{1}{27}$$

$$f''_{yy}(x, y) = \frac{2}{y^3}$$

A Hesse-determináns:

$$f''_{xx}(x, y)f''_{yy}(x, y) - (f''_{xy}(x, y))^2 = \frac{2}{x^3} \frac{2}{y^3} - \left(\frac{1}{27}\right)^2 = \frac{4}{x^3y^3} - \frac{1}{27^2}$$

Ez a $(3, 3)$ pontban:

$$\frac{4}{3^3 \cdot 3^3} - \frac{1}{27^2} = \frac{4-1}{27^2} = \frac{3}{27^2},$$

ami pozitív, így ez lokális szélsőérték. Mivel $f''_{xx}(3, 3) = \frac{2}{3^3}$, ami pozitív, ez lokális minimum. A lokális minimum értéke:

$$f(3, 3) = \frac{3 \cdot 3}{27} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$

(d) Az elsőrendű parciális deriváltak:

$$f'_x(x, y) = 2 - 2x$$

$$f'_y(x, y) = 2 - e^y$$

A stacionárius pontok egyenlete:

$$2 - 2x = 0$$

$$2 - e^y = 0$$

Ezekből $x = 1$, és $y = \ln 2$. Tehát az egyetlen stacionárius pont az $(1, \ln 2)$.

$$f''_{xx}(x, y) = -2$$

$$f''_{xy}(x, y) = 0$$

$$f''_{yy}(x, y) = -e^y$$

A Hesse-determináns:

$$f''_{xx}(x, y)f''_{yy}(x, y) - (f''_{xy}(x, y))^2 = (-2) \cdot (-e^y) - 0^2 = 2e^y,$$

ami az $(1, \ln 2)$ pontban $2 \cdot 2 = 4$, ami pozitív. Mivel $f''_{xx}(1, \ln 2) = -2$ negatív, így ez lokális maximum. A lokális maximum értéke:

$$f(1, \ln 2) = 2 + 2 + 2 \ln 2 - 1 - 2 = 1 + 2 \ln 2.$$

F2. Egy $V = 4,5 \text{ dm}^3$ térfogatú téglatest alakú dobozt hosszában egyszer, keresztben pedig kétszer átkötünk egy zsineggel. Mekkora legyen a csomag szélessége, hossza és magassága, hogy a legkevesebb zsinetet kelljen felhasználni?

M2. Legyen a téglatest oldalhosszai a, b, c (deciméterben mérve). Ekkor a térfogat $abc = 4,5$, amiből $c = \frac{4,5}{ab}$. Ha a a leghosszabb oldal, akkor ha hosszában kötjük át a csomagot, akkor annak a hossza $2(a + b)$, és ha keresztben, akkor $2(b + c)$. Mivel keresztben kétszer kötjük át, így összesen

$$2(a + b) + 2 \cdot 2(b + c) = 2a + 6b + 4c$$

zsineg szükséges. Felhasználva, hogy $c = \frac{4,5}{ab}$, a

$$f(a, b) = 2a + 6b + 4c = 2a + 6b + 4 \cdot \frac{4,5}{ab} = 2a + 6b + \frac{18}{ab}$$

függvényt kell minimalizálni. Ezt az eddigi módszerrel tehetjük meg (annyi különbséggel, hogy most a változókat a, b -vel jelöljük). Az elsőrendű parciális deriváltak:

$$f'_a(a, b) = 2 - \frac{18}{a^2b}$$

$$f'_b(a, b) = 6 - \frac{18}{ab^2}$$

A stacionárius pontok egyenlete:

$$2 - \frac{18}{a^2b} = 0$$

$$6 - \frac{18}{ab^2} = 0$$

Ezekből $a^2b = 9$ és $ab^2 = 3$. Ekkor $a^3b^3 = 27$, amiből $ab = \sqrt[3]{27} = 3$. Tehát

$$a = \frac{a^2b}{ab} = \frac{9}{3} = 3, \quad b = \frac{ab^2}{ab} = \frac{3}{3} = 1, \quad c = \frac{4,5}{ab} = \frac{3}{2} = 1,5$$

A másodrendű parciális deriváltak a Hesse-determinánshoz:

$$\begin{aligned} f''_{aa}(a, b) &= \frac{36}{a^3b} \\ f''_{ab}(a, b) &= \frac{18}{a^2b^2} \\ f''_{bb}(a, b) &= \frac{36}{ab^3} \end{aligned}$$

A Hesse-determináns:

$$f''_{aa}(a, b)f''_{bb}(a, b) - (f''_{ab}(a, b))^2 = \frac{36}{a^3b} \cdot \frac{36}{ab^3} - \left(\frac{18}{a^2b^2}\right)^2 = \frac{36^2 - 18^2}{a^4b^4},$$

ami pozitív (mivel a, b pozitív). Mivel $f''_{aa}(3, 1)$ is pozitív, így ez lokális minimum. Tehát tényleg ezen adatokhoz tartozó csomaghoz kell a lehető legkevesebb zsineg.

F3. Felül nyitott, téglatest alakú dobozt készítünk, melynek térfogata 1 m^3 . Mekkora legyen éleinek hosszúsága, hogy elkészítéséhez a lehető legkevesebb anyagot használjuk fel?

M3. Jelölje a téglatest oldalait a, b, c méterben mérve. Így a térfogat $abc = 1$, amiből $c = \frac{1}{ab}$. Ha a c a magasság, akkor az alaplapp területe ab , míg az oldallapoké ac , illetve bc . Mivel két-két ugyanolyan oldallap van, így a felhasznált anyag:

$$f(a, b) = ab + 2ac + 2bc = ab + 2a\frac{1}{ab} + 2b\frac{1}{ab} = ab + \frac{2}{b} + \frac{2}{a}$$

Ennek elsőrendű parciális deriváltjai:

$$\begin{aligned} f'_a(a, b) &= b - \frac{2}{a^2} \\ f'_b(a, b) &= a - \frac{2}{b^2} \end{aligned}$$

A stacionárius pontok egyenlete:

$$\begin{aligned} b - \frac{2}{a^2} &= 0 \\ a - \frac{2}{b^2} &= 0 \end{aligned}$$

Ezekből $a^2b = 2$, és $ab^2 = 2$. Ekkor $a^3b^3 = 4$, amiből $ab = \sqrt[3]{4} = 2^{\frac{2}{3}}$. Tehát

$$a = \frac{a^2b}{ab} = \frac{2}{2^{\frac{2}{3}}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}, \quad b = \frac{ab^2}{ab} = \frac{2}{2^{\frac{2}{3}}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}, \quad c = \frac{1}{ab} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} = 2^{-\frac{2}{3}}$$

A másodrendű parciális deriváltak a Hesse-determinánshoz:

$$f''_{aa}(a, b) = \frac{4}{a^3}$$

$$f''_{ab}(a, b) = 1$$

$$f''_{bb}(a, b) = \frac{4}{b^3}$$

A Hesse-determináns:

$$f''_{aa}(a, b)f''_{bb}(a, b) - (f''_{ab}(a, b))^2 = \frac{4}{a^3} \frac{4}{b^3} - 1,$$

ami a $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$ pontban $3 > 0$. Mivel $f''_{aa}(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}) = \frac{4}{(\sqrt[3]{2})^3} = 2$ is pozitív, így ez lokális minimum. Tehát tényleg ezen adatokhoz tartozó téglatesthez kell a lehető legkevesebb anyag.