10. gyakorlat megoldásai
Iránymenti derivált, láncszabály

F1. Számítsa ki az alábbi kétváltozós függvények iránymenti deriváltját az adott pontban.

(a) $f(x,y) = 2x^2 - 3xy + y^2 + 15 \quad P(3,2); \quad \mathbf{v} = (2,-4)$

(b) $f(x,y) = \operatorname{tg}(2x+y) \quad P\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right); \quad \alpha = 225^\circ$

M1. (a) Először kiszámoljuk a parciális deriváltakat:

$$f'_x(x,y) = 4x - 3y$$
$$f'_y(x,y) = -3x + 2y$$

Ezek értéke a $P(3,2)$ pontban: $f'_x(3,2) = 12-6 = 6$ és $f'_y(3,2) = -9+4 = -5$. Így a függvény gradiense a P-ben: $\operatorname{grad} f(P) = (6,-5)$. A $\mathbf{v}$ vektor iránya:

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{(2,-4)}{\sqrt{2^2+(-4)^2}} = \frac{(2,-4)}{\sqrt{20}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

Az iránymenti derivált értéke a gradiens és az irányvektor skaláris szorzata:

$$f'_{\mathbf{e}}(P) = \langle \operatorname{grad} f(P), \mathbf{e} \rangle = \left\langle (6,-5), \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \right\rangle = \frac{6}{\sqrt{5}} + \frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{16}{\sqrt{5}}$$

(b) Először kiszámoljuk a parciális deriváltakat:

$$f'_x(x,y) = \frac{1}{\cos^2(2x+y)} \cdot 2$$
$$f'_y(x,y) = \frac{1}{\cos^2(2x+y)}$$

Ezek értéke a P pontban: $f'_x(P) = 8$ és $f'_y(P) = 4$, mivel $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$. Így a függvény gradiense a P-ben: $\operatorname{grad} f(P) = (8,4)$. Ebben az esetben vektor helyett szöggel adjuk meg az irányt. Ez azt jelenti, hogy az irányvektor ezt a szöget zárja be az x tengellyel, azaz az irányvektor:

$$\mathbf{e} = (\cos 225^\circ, \sin 225^\circ) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Az iránymenti derivált értéke ebben az esetben is a gradiens és az irányvektor skaláris szorzata:

$$f'_{\mathbf{e}}(P) = \langle \operatorname{grad} f(P), \mathbf{e} \rangle = \left\langle (8,4), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\rangle = -\frac{8}{\sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{2}} = -\frac{12}{\sqrt{2}} = -6\sqrt{2}$$

F2. Legyen $f(x, y) = \sqrt{x^2 - 4y}$. Számítsuk ki a $P(4, 3)$ pontban az iránymenti derivált minimumát és maximumát!

M2. A parciális deriváltak:

$$f'_x(x, y) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 4y}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4y}}$$
$$f'_y(x, y) = \frac{-4}{2\sqrt{x^2 - 4y}} = \frac{-2}{\sqrt{x^2 - 4y}}$$

A P pontban az értékük: $f'_x(4, 3) = \frac{4}{\sqrt{4}} = 2$ és $f'_y(4, 3) = \frac{-2}{\sqrt{4}} = -1$, így a gradiens: $\mathrm{grad} f(P) = (2, -1)$. Az iránymenti derivált a gradiens irányába maximális, azaz

$$\mathbf{e} = \frac{\mathrm{grad} f(P)}{|\mathrm{grad} f(P)|} = \frac{(2, -1)}{|(2, -1)|} = \frac{(2, -1)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

irányban. Ekkor az értéke a gradiens hossza, azaz

$$|\mathrm{grad} f(P)| = |(2, -1)| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}.$$

A minimum az ellentétes irányban van, és ekkor az értéke ennek az ellentettje, azaz $-\sqrt{5}$.

F3. Az $f(x, y) = \frac{y^3}{e^{2x+1}}$ képlettel megadott felületre a $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ pont fölött egy vízcseppet ejtünk. Merre fog elindulni? Mekkora az adott pontban a maximális meredekség?

M3. A vízcsepp nyilván arra fog elindulni, amerre a leginkább lejt a felület, azaz amerre a legkisebb az iránymenti derivált, azaz a gradienssel ellentétes irányba. Számoljuk ki a gradienst! A parciális deriváltak kiszámításához a függvényt $f(x, y) = y^3 e^{-2x-1}$ alakba írjuk.

$$f'_x(x, y) = y^3 e^{-2x-1}(-2)$$
$$f'_y(x, y) = 3y^2 e^{-2x-1}$$

A $P = \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ pontban az értékük: $f'_x(P) = -2$, illetve $f'_y(P) = 3$. Így $\mathrm{grad} f(P) = (-2, 3)$, a csepp az ezzel ellentétes irányba, azaz a $(2, -3)$ irányba fog elindulni. A maximális meredekség a gradiens irányában van, értéke a gradiens vektor hossza, ami

$$|(-2, 3)| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}.$$

F4. Írjuk fel az $f(x,y,z) = (x + 2yz, \sqrt{x} + \ln z)$ függvény $(4,3,1)$ pontbeli Jacobi-mátrixát.

M4. Az f függvény komponensfüggvényei:

$$f_1(x,y,z) = x + 2yz$$
$$f_2(x,y,z) = \sqrt{x} + \ln z$$

A Jacobi-mátrix ezen függvények parciális deriváltjaiból áll: a sorokban a megfelelő komponens függvények parciális deriváltjai, míg az oszlopokban a megfelelő változó szerinti parciális deriváltak vannak. Például a Jacobi-mátrix első sorának második eleme az első komponensfüggvény második változó szerinti parciális deriváltja, azaz $f'_{1y}(x,y,z) = 2z$. Így a Jacobi-mátrix a következő:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2z & 2y \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & 0 & \dfrac{1}{z} \end{bmatrix}.$$

Ez a $(4,3,1)$ pontban a következő:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ \dfrac{1}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

F5. Legyen $f(x,y) = 3x^2y$, és $x(t) = \sin(t)$, $y(t) = \ln t$. Határozzuk meg az $f(x(t), y(t))$ függvény deriváltját a többváltozós láncszabály segítségével.

M5. Az f függvény Jacobi-mátrixa:

$$\begin{bmatrix} 6xy & 3x^2 \end{bmatrix}$$

Míg a $t \mapsto (x(t), y(t)) = (\sin(t), \ln(t))$ függvény (nevezzük $g(t)$-nek) Jacobi-mátrixa:

$$\begin{bmatrix} \cos(t) \\ \dfrac{1}{t} \end{bmatrix}$$

Az $f \circ g$ összetett függvény deriváltja a láncszabály szerint

$$(f \circ g)'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t),$$

ahol a $\cdot$ mátrixszorzást jelent. Ez azesetünkben:

$$(f \circ g)'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t) = \begin{bmatrix} 6\sin(t)\ln(t) & 3\sin^2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \dfrac{1}{t} \end{bmatrix} =$$
$$= 6\sin(t)\ln(t)\cos(t) + \frac{3\sin^2(t)}{t}$$